Cálculo Diferencial - Taller No. 2

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Derive la función.

   (i) $y = 3^{x \ln x}$

   (ii) $f(x) = \cos\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$

   (iii) $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3$

   (iv) $y = \cos(e^{\sqrt{\tan(3x)}})$

   (v) $y = \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{2x+1} + \dfrac{x^3}{24}$

   (vi) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x^2-1}$

   (vii) $f(x) = \sqrt{\tan(x^2)}$

   (viii) $y = x\sin(\cos(2x))$

   (ix) $y = \dfrac{ax^2+b}{bx^2+a}$

   (x) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

   (xi) $f(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t + \cos t}$

   (xii) $f(x) = \tan^{-1}(x - \sqrt{1+x^2})$

   (xiii) $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$

   (xiv) $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

   (xv) $y = (\sin x)^x$

   (xvi) $y = (\ln x)^{1/x}$

   (xvii) $y = 2^{\sec x}(\sin x)^{2^x}$

2. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ por derivación implícita.

   (i) $e^y \cos x = 1 + \sin(xy)$

   (ii) $y \sin(x^2) = x \sin(y^2)$

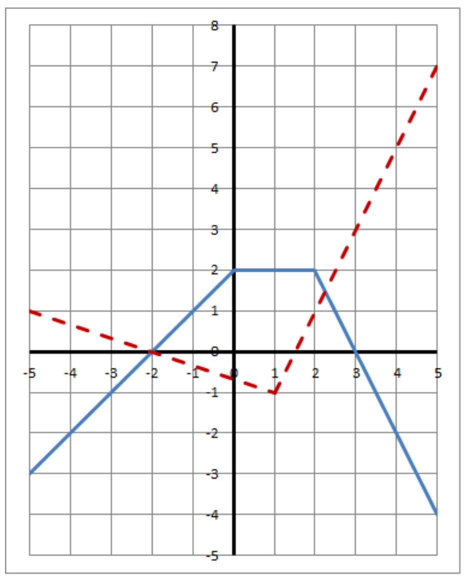
   (iii) $\sin(xy) = x^2 - y$

   (iv) $x^2 \cos y + \sin(2y) = xy$

   (v) $yx + \cos(x + 2y) = (x^2 + y^2)^2$

   (vi) $y^2 - y = (x^2 + y^3)^2$

3. En la figura de abajo se muestran las gráficas de f en azul y línea contínua y de g en rojo y línea punteada. Halle los siguientes valores.



   (i) $(f \cdot g)'(4)$

   (ii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(3)$

   (iii) $(f \circ g)'(2)$

   (iv) $(g \circ f)'(-3)$

4. Evalue los siguientes límites.

   (i) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[5]{1 - x} + 1}{x - 2}$

   (ii) $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{1 - \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{t}$

5. Encuentre una ecuación de la recta tangente de la curva $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$ en el punto $(3,1)$.

6. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la recta tangente tiene pendiente -1.

7. Encontrar el punto de tangencia de la recta $y = -x$ a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$.

8. Encuentre todos los puntos en la gráfica de la función $f(x) = 2\sin x + \sin^2 x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

9. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, que pasen por el punto $(-1,5)$.

10. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$, que pasen por el punto $(-5,0)$.

11. Encuentre los valores de a y b para los cuales f es diferenciable en toda parte

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0, \\ ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

12. El volumen de un cubo se incrementa a rázon de $10\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$. ¿Que tan rápido se incrementa el área superficial cuando la longitud de un lado es de 30 cm?

13. Dos barcos salen simultaneamente de un puerto, uno viaja hacia el sur a una velocidad de 30 Km/H y el otro hacia el sur-este a una velocidad de 40 Km/H. Después de dos horas ¿cuál es la velocdad de separación de los dos barcos?

14. Suponga que se vacía el agua de un tanque esférico de 10 pies de radio. Si el nivel del agua en el tanque es de 5 pies y esta decreciendo a razón de 3 pies/seg ¿con qué razón disminuye el radio de la superficie del agua?

15. Un hombre de 6 pies de altura camina a una razón de 5 pies/seg hacia un faro cuya luz está a 16 pies del piso. ¿A qué razón cambia la longitud de su sombra cuando está a 10 pies de la base del faro?

16. Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son inicialmente 6 centímetros y 2 centímetros. Si el cateto mayor decrece a razón de 2 centímetros por minuto y el menor crece a razón de 1 centímetro por minuto, determine la razón con la cual cambia el área del triángulo en el instante en el que el cateto mayor mide 4 centímetros.

17. Un programa de matemáticas hace mover en la pantalla de un computador un punto $C(x,y)$ a lo largo de la curva $y = e^{-x}$, de tal manera que la coordenada x avanza a razón de 2 cm por minuto. Durante su recorrido, este punto va extendiendo, en la esquina del primer cuadrante un rectángulo $ABCD$ que se construye así: $A = (0,0)$, $B = (x,0)$, $C = (x,y)$ y $D = (0,y)$. ¿Qué tan rápido estará variando el área del rectángulo cuando $x = 4$?