Introducción al plano hiperbólico

Aritmética y Sistemas Dinámicos — Florent Schaffhauser, Vincent Pilloni

Ejercicio 1. Sea $\mathbf{D}$ el disco hiperbólico (con la métrica de Poincaré).
a. Mostrar que, para todo $\alpha \in]0;1[$, existe una única geodésica entre 0 y α.
b. Calcular la distancia hipérbolica entre 0 e $i\alpha$.

Ejercicio 2. Sea $\mathbf{SU}(1,1)$ el grupo de matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ y tales que $|a|^2 - |b|^2 = 1$.
a. Verificar que $\mathbf{SU}(1,1)$ es un grupo cuyo centro es $\{\pm I_2\}$.
b. Mostrar que $\mathbf{SU}(1,1)$ actúa en $\mathbf{D}$ de por automorfismos holomorfos vía $A \cdot z = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ y que la aplicación $A \mapsto A \cdot 0$ induce un homeomorfismo $\mathbf{SU}(1,1)/S_1 \simeq \mathbf{D}$.

Ejercicio 3. Mostrar que si (z_1, z_2) y (w_1, w_2) son dos pares de puntos en $\mathbf{D}$ tales que $d(z_1, z_2) = d(w_1, w_2)$, entonces existe una isometría directa h de $\mathbf{D}$ tal que $h(z_1) = w_1$ y $h(z_2) = w_2$.

Ejercicio 4. (Geodésicas de $\mathbf{H}$) Sea $C = C(a, R)$ el círculo de centro a y de radio R en $\mathbb{C}$. Para cualquier $z \neq a$ en $\mathbb{C}$, se llama $I_C(z)$ al único punto w de la semi-recta $[a, z)$ tal que $|w-a||z-a| = R^2$.
a. Mostrar que $I_C(z) = \frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a$.
b. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea C' el semi-círculo de centro x_0 y de radio R en el semi-plano superior $\mathbf{H}$. Sea C' el semi-círculo de centro $x_0 + R$ y de radio $2R$ en $\mathbf{H}$. Mostrar que $I_C(C')$ es la recta de ecuación $x = x_0 - R$.
c. Deducir de lo anterior que C' es una geodésica de $\mathbf{H}$.
d. Dado dos puntos z_1 y z_2 en $\mathbf{H}$ con parte real distinta, mostrar que existe un único semi-círculo con diámetro en el eje real y pasando por z_1 y z_2.
e. Mostrar que ese semi-círculo es la única geodésica hiperbólica completa pasando por z_1 y z_2.
f. Hallar todas las geodésicas de $\mathbf{H}$ y $\mathbf{D}$.

Ejercicio 5. Mostrar que la transformación $z \mapsto \frac{1}{z}$ de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ envía rectas y círculos de $\mathbb{C}$ a rectas o círculos de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 6. **a.** Mostrar que la distancia hiperbólica entre 0 y z en $\mathbf{D}$ es igual a $\log \frac{1+|z|}{1-|z|}$.
b. Mostrar que la distancia hiperbólica entre $z_1 = x+iy_1$ y $z_2 = x+iy_2$ (misma parte real) en $\mathbf{H}$ es igual a $|\log(y_2) - \log(y_1)|$.
c. Hallar una fórmula general para $d(z_1, z_2)$ en $\mathbf{D}$ y en $\mathbf{H}$.

Ejercicio 7. Dado tres puntos z_1, z_2, z_3 en el plano hiperbólico ($\mathbf{D}$ o $\mathbf{H}$), mostrar que $d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ si y solamente si esos tres puntos están ubicados en un misma geodésica.

Ejercicio 8. **a.** Mostrar que el grupo de isometrías directas de $\mathbf{H}$ para la métrica de Poincaré es

$$\{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, ab - bc = 1\}$$

e identificar ese grupo con $\mathbf{PSL}(2;\mathbb{R})$.
Indicación: Mostrar que $\mathbf{PSL}(2;\mathbb{R}) = h^{-1}\mathbf{PSU}(1,1)h$ en $\mathbf{PGL}(2;\mathbb{C})$, donde h es la transformación de Cayley $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.
b. Mostrar que $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}) \simeq$

$$\mathbf{PSL}(2;\mathbb{R}) \cup \{-\overline{f(z)} : f \in \mathbf{PSL}(2;\mathbb{R})\}$$

e identificar este grupo con $\mathbf{PSL}(2;\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbf{PGL}(2;\mathbb{R})$, donde $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbf{PSL}(2;\mathbb{R})$ por $f(z) \mapsto -\overline{f(-\overline{z})}$.
Indicación: Mostrar que la transformación $\sigma : z \mapsto \overline{z}$ de D verifica $h^{-1}\sigma h(z) = -\overline{z}$ en $\mathbf{H}$.
c. Mostrar que existe un homeomorfismo $\mathbf{SL}(2;\mathbb{R})/\mathbf{SO}(2) \simeq \mathbf{H}$.

Ejercicio 9. Mostrar que existe una isometría de $\mathbf{H}$ que envía la familia de rectas horizontales $\{\mathrm{Im}\, z = c\}_{c>0}$ a la familia de círculos de $\overline{\mathbf{H}}$ tangentes a un mismo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 10. (Módulos de curvas elípticas) Sean ω_1 y ω_2 dos números complejos independientes sobre $\mathbb{R}$ y sea $\Gamma_{\omega_1,\omega_2} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ el retículo de $\mathbb{C}$ que generan.
a. Mostrar que existe $u \in \mathbb{C}^*$ tal que $u\Gamma_{\omega_1,\omega_2} = \Gamma_{1,\tau}$ con $\mathrm{Im}\,\tau > 0$.
b. Dado τ, τ' en $\mathbf{H}$, mostrar que existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ tal que $f(\Gamma_{1,\tau}) = \Gamma_{1,\tau'}$ si y solamente si $\tau' \in \mathbf{PSL}(2;\mathbb{Z}) \cdot \tau$.
c. Mostrar que lo anterior ocurre si y solamente si las superficies de Riemann $\mathbb{C}/\Gamma_{1,\tau}$ y $\mathbb{C}/\Gamma_{1,\tau'}$ son isomorfas.