Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de Área de Probabilidad y Estadística. 2015-II

Instrucciones:

- Escoja y responda cinco (5) de las seis (6) preguntas siguientes, incluyendo suficientes cálculos y explicaciones sobre su procedimiento.
- Tiempo del examen: Tres (3) horas.
- En la última página encontrará un formulario con las funciones de probabilidad (o densidad de probabilidad, en el caso continuo) la media y varianza de las principales distribuciones.

Ejercicios:

1. Considere la caminata aleatoria en $S = \{0, 1, \dots\}$ con barrera en 0, es decir, en 0 se mantiene en 0 o sube a 1. Asuma que $p < q = 1 - p$, donde p es la probabilidad de subir y q la de bajar. Calcule la distribución estacionaria π.

2. Sean $a_1 < a_2 < \cdots$ una sucesión de números reales y sean p_n, $n = 1, 2, \dots$ una sucesión de números positivos. Defina la medida $\lambda(A) = \sum_{a_i \in A} p_i$ para A conjunto de Borel y ν la medida de conteo $\lambda(A) = \sum_{a_i \in A} 1$. Calcule la densidad de λ con respecto a ν.

3. Sean $\{X_j^{(n)}\}$ una sucesión de variables aleatorias no negativas i.i.d, todas con media $m < \infty$. El proceso de ramificación $\{Z_n\}$ se define como $Z_0 = 1$ y para $n = 1, 2, \dots$
$$Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_j^{(n)},$$
con $Z_n = 0$ si $Z_{n-1} = 0$. Muestre que $\{m^{-n} Z_n\}$ es una martingala con respecto a la filtración natural.

4. (a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{P})$, la $\sigma-$álgebra generada por una partición finita con $0 < P(A_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Muestre que $E[1_A|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i) 1_{A_i}$.
   (b) Sea X una variable uniforme $[0, 1]$ definida en $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \mathrm{Leb})$ y la partición $\mathcal{P}$ dada por $A_1 = [0, \frac{1}{4}]$, $A_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $A_3 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $A_4 = (\frac{3}{4}, 1]$. Calcule $E[X|\sigma(\mathcal{P})]$.

5. (a) Derive el estimador de máxima verosimilitud para el parametro p de la distribuciíon $\mathrm{Bin}(n, p)$ con parametros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in [0, 1]$.
   (b) Derive el estimador de máxima verosimilitud para el parametro β de la distribución $\mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$ con parametros $\alpha \geq 1$ y $\beta > 0$.

6. (a) Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{1}{n})$ y Y una variable aleatoria con $Y \sim \mathrm{Poisson}(1)$. Muestre que $X_n \to Y$ para $n \to \infty$ en distribución.

(b) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con

$$X_n \sim \frac{1}{n^2}\delta_{-n} + (1 - \frac{2}{n^2})\delta_1 + \frac{1}{n^2}\delta_n.$$

Decide si los enunciados siguentes son correctos y demuestre su decisión.

- $X_n \to 1$ en distribución.
- $X_n \to 1$ en probabilidad.
- $X_n \to 1$ en L^1.
- $X_n \to 1$ en L^2.
- $X_n \to 1$ casi seguro.

Principales Distribuciones

Distribución	$p(x)$ o $f(x)$	Rango(X)	E(X)	Var$(X\ )$
Bin(n,p)	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
Geo(p)	$(1-p)^{x-1}p$	$\{0,1,2,\dots\}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
BinNeg(k,p)	$\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}$	$\{k,k+1,\dots\}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
Poisson(λ)	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	$\{0,1,2,\dots\}$	λ	λ
N(μ,σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$x\in\mathbb{R}$	μ	σ^2
Unif(a,b)	$\frac{1}{b-a}$	$a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exp(λ)	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma(α,β)	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}$	$x>0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Beta(α,β)	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$x\in[0,1]$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$