Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de Área de Probabilidad y Estadística
junio - 2013

Instrucciones:

- Escoja y responda cinco (5) de las seis (6) preguntas siguientes, incluyendo suficientes cálculos y explicaciones sobre su procedimiento.
- Tiempo del examen: Tres (3) horas.
- En la última página encontrará un formulario con la media y varianza de las principales distribuciones.

1. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \cdots$ una sucesión creciente de sub-sigma-álgebras de $\mathcal{A}$. Sea $X \in \mathcal{L}^1(P)$ y para cada $i > 0$ en $\mathbb{N}$, $X_i = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_i)$. Pruebe que $\{(X_i, \mathcal{A}_i), i \geq 1\}$ es una martingala uniformemente integrable.

2. En el paseo al azar simétrico (con probabilidad $1/2$ de ganar y probabilidad $1/2$ de perder una unidad en cada paso), sea S_n la ganancia acumulada en n pasos, $n \geq 1$. Suponemos que $S_0 = 0$.
(i) Hallar la probabilidad de que S_{2n} valga 0 y todos los valores intermedios $S_1, S_2, \ldots,$ S_{2n-1} sean menores que n. (Probabilidad de estar en cero a tiempo $2n$ sin haber tocado la barrera de altura n).
(ii) Hallar la probabilidad de que S_{2n} sea no negativo sin que se haya tocado la barrera de altura n, es decir, $S_i < n, \forall i \leq 2n$.

3. Decimos que una sucesión de variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots$ es acotada en probabilidad (o "tensa") cuando, para todo $\epsilon > 0$, existen $M > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que,
$$\Pr(|Y_n| \geq M) \leq \epsilon, \; \forall\, n \geq n_0.$$
Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. con media μ y varianza σ^2 finita. Sea $\overline{X}_n = (1/n)(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. Pruebe que la sucesión $Z_1, Z_2, \ldots$ es tensa, siendo $Z_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$.

4. Sean φ y Φ, respectivamente, la función densidad de probabilidad y la función de distribución acumulativa de una variable Normal(0,1). Pruebe que
$$\lim_{c \to \infty} \frac{1 - \Phi(c)}{\frac{1}{c}\varphi(c)} = 1$$

5. (a) Dar ejemplo de sucesión de variables aleatorias $X, X_1, X_2, \ldots,$ definidas en un mismo espacio de probabilidad, tales que $X_n \overset{(\text{p})}{\to} X$ pero $X_n \overset{(\text{c.s.})}{\nrightarrow} X$.
(b) Dar ejemplo de sucesión de variables aleatorias $X, X_1, X_2, \ldots,$ definidas en un mismo espacio de probabilidad, tales que $X_n \overset{(\text{d})}{\to} X$ pero $X_n \overset{(\text{p})}{\nrightarrow} X$.

6. Los datos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forman una muestra i.i.d. proveniente de la distribución con función de distribución acumulativa

$$F(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^2, \qquad 0 \leq x \leq \theta,$$

siendo $\theta > 0$ un parámetro. Para estimar θ se propone usar como estimador
$\tilde{\theta} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
(i) Hallar sesgo($\tilde{\theta}$)$= \mathbb{E}\tilde{\theta} - \theta$.
(ii) Hallar Var($\tilde{\theta}$).
(iii) Pruebe que $\tilde{\theta} \xrightarrow{(p)} \theta$.

Principales Distribuciones

Distribución	$p(x)$ o $f(x)$	Rango(X)	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geo}(p)$	$(1-p)^{x-1}p$	$\{0,1,2,\dots\}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\mathrm{BinNeg}(k,p)$	$\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}$	$\{k,k+1,\dots\}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
$\mathrm{Poisson}(\lambda)$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	$\{0,1,2,\dots\}$	λ	λ
$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$x\in\mathbb{R}$	μ	σ^2
$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$	$a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\exp(\lambda)$	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}$	$x>0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$