Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de Área de Probabilidad y Estadística
noviembre - 2012

Instrucciones:

- Escoja y responda cinco(5) de las seis(6) preguntas siguientes, incluyendo suficientes cálculos y explicaciones sobre su procedimiento.
- Tiempo del examen: Tres (3)horas.
- En las última página encontrará un formulario con la media y varianza de las principales distribuciones.

1. Sea f una función continua y acotada. Hallar

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\mathrm{e}^{-(x_1+\cdots+x_n)}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n.$$

Ayuda: Vea la integral como una esperanza y acótela, usando convergencia en probabilidad.

2. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional con función de distribución acumulativa conjunta $F(x,y)$ y sean $F_1(x)$, $F_2(y)$, las funciones de distribución acumulativas de X e Y, respectivamente. Se dice que el par (X,Y) presenta *dependencia de cuadrante positivo* cuando

$$F(x,y)\geq F_1(x)F_2(y),\qquad \forall x,y.$$

La función conjunta de supervivencia, $S(x,y)$ se define como $S(x,y)=\Pr(X>x,Y>y)$ mientras que $S_1(x)=\Pr(X>x)$ y $S_2(y)=\Pr(Y>y)$ son las funciones de supervivencia de X e Y, respectivamente.
Pruebe que el par (X,Y) tiene dependencia de cuadrante positivo, si y solo si

$$S(x,y)\geq S_1(x)S_2(y),\qquad \forall x,y.$$

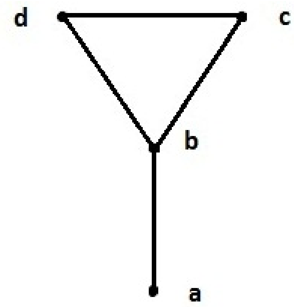
3. Para el par de variables X e Y, con medias μ_1, μ_2 y varianzas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, recordemos que la covarianza y correlación entre X y Y, están dadas, respectivamente, por

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y)=\mathbb{E}((X-\mu_1)(Y-\mu_2))\qquad \text{y}\qquad \rho=\frac{\mathrm{Cov}\,(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$$

(a) Para $t\in\mathbb{R}$, calcule $\mathrm{Var}(X+tY)$.
(b) ¿Para cual valor de t es mínima la varianza de la parte (a)?
(c) Pruebe que $\rho\in[-1,1]$.
(d) Si $\rho=1$, deduzca que existe un valor de t en $\mathbb{R}$, tal que la varianza de la parte (a) es cero y existe una recta L tal que $\Pr((X,Y)\in L)=1$.

4. Una partícula realiza un paseo al azar en el grafo de la figura de la manera siguiente: Cuando la partícula se encuentra en un vértice, elige uno de los vecinos de este, al azar

(con probabilidades iguales), se mueve a ese vecino y el proceso se repite.



(a) Escriba la matriz de transición correspondiente a este paseo al azar.
(b) Encuentre el número esperado de pasos (tiempo de llegada) para que el paseo llegue al vértice d cuando arranca desde a. (Ayuda: Encuentre todos los tiempos de llegada a d arrancando desde a, b y c)

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables i.i.d. con función generadora de momentos $\varphi(\theta) = \mathbb{E}(\exp(\theta\, X_1))$, que existe en un entorno del 0. Pruebe que, para cada θ en dicho entorno, la sucesión

$$Z_n = \frac{\exp(\theta\, S_n)}{\varphi^n(\theta)}$$

es una martingala, siendo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

5. Sea X una variable con distribución Gamma(4,β). Recordemos que la densidad Gamma viene dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(x/\beta)} \text{ para } x > 0. \tag{1}$$

(a) Hallar el EMV para β (cuando se sabe que $\alpha = 4$).
(b) Hallar la información de Fisher para una observación y la correspondiente cota de Cramér Rao para una muestra de tamaño n.
(c) ¿El EMV alcanza la cota Cramér-Rao para una muestra de tamaño n?

6. Sea $X_n \sim$ Poisson(n).
(a) Pruebe que X_n, debidamente estandarizada, converge en distribución a una Normal(0,1).
(b) Pruebe que

$$\mathrm{e}^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right) \to \frac{1}{2}$$

cuando $n \to \infty$.

Principales Distribuciones

Distribución	$p(x)$ o $f(x)$	Rango(X)	E(X)	Var(X)
Bin(n,p)	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
Geo(p)	$(1-p)^{x-1}p$	$\{0,1,2,\dots\}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
BinNeg(k,p)	$\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}$	$\{k,k+1,\dots\}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
Poisson(λ)	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	$\{0,1,2,\dots\}$	λ	λ
N(μ,σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$x\in\mathbb{R}$	μ	σ^2
Unif(a,b)	$\frac{1}{b-a}$	$a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exp(λ)	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma(α,β)	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}$	$x>0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$