Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de Área de Probabilidad y Estadística
mayo - 2011

Instrucciones:

- Escoge cinco(5) de seis(6) preguntas
- Tiempo : Tres (3)horas

1. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar si es falsa o verdadera. Justificar brevemente la respuesta.

   a) Sean $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $A, B \in \Im$. Sea f la función definida por:
   $$f(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 1 & \text{si} \quad \omega \in A^c \cap B \\ 0 & \text{si} \quad \omega \in A^c \cap B^c \end{cases}$$
   entonces f es $\Im - \mathcal{B}(\mathbb{R}) -$ medible.

   b) Si X y Y son dos variables aleatorias reales tales que $EX \geq EY$ entonces $X \geq Y$ casi siempre.

   c) Si $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $A, B \in \Im$.entonces la probabilidad de que exactamente uno de los eventos A, B ocurra es igual a $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

   d) Sean $X,\ X_1,\ X_2, \cdots$ variables aleatorias reales. Si $X_n \xrightarrow{r} X$ entonces $X_n \xrightarrow{P} X$

   e) Sean $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $H \subseteq G \subseteq \Im$, donde G y H son $\sigma-$algebras. Entonces $E(E(X \mid G) \mid H) = E(X \mid G)$.

2. a) Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. Hallar una función de densidad de la variable aleatoria
   $$Y := \ln X.$$

   b) Un jugador extrae simultánea y aleatoriamente dos bolas de una urna que contiene 8 bolas blancas, 5 bolas negras y 3 bolas azules. Suponga que el jugador gana 5000 pesos por cada bola negra seleccionada y pierde 3000 pesos por cada bola blanca seleccionada. Sea X la variable aleatoria que denota la fortuna del jugador. Hallar la función de densidad de la variable aleatoria X.

3. a) Demuestre que una variable aleatoria X es integrable si, sólo si para cara $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que
   $$\int_{|X|>M} |X| d\mathbf{P} < \epsilon.$$

   b) Sea X un proceso medible y sea T un tiempo aleatorio finito. Demostrar que X_T es una variable aleatoria.

4. *a*) Sea N_t es un proceso de Poisson de parámetro λ. Demostrar que $(N(t)-\lambda t)^2-\lambda t$ es una martingala.

   b) Una urna contiene incialmente $a \geq 1$ bolas azules y $b \geq 1$ bolas verde que están mezcladas. Se saca una bola al azar, y luego se introduce de nuevo junto con $c \geq 1$ bolas del mismo color. Se continua así indefinidamente. Sea X_n la proporción de bolas azules en la urna cuando se hace la $n-$ésima extracción. Así $X_0 = \frac{a}{a+b}$. Demostrar que X_n una martingala.

5. Clasifique los estados de las cadenas de Markov con matrices de transción P y espacios de stados dados por;

   a) $\mathcal{S} = \{1,2,3\}$ para $p \in [0,1/2]$

$$P = \begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix}$$

   b) $\mathcal{S} = \{1,2,3,4\}$ para $p \in [0,1]$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

   En cada caso calcule P^n, la matriz de transición en n pasos y el tiempo medio de recurrencia de cada estado.
   [Sugerencia: Diagonalize la matriz P.]

6. Se tiene una variable aleatoria X con densidad para $X > 0$ y $\theta > 0$

$$f(x;\theta) = \theta(1+x)^{-1-\theta}$$

   $X_1, X_2, \ldots X_n$ es una muestra aleatoria i.i.d. y se toma $\beta = \frac{1}{\theta}$.

   a) Calcule un estimador $\widehat{\beta}$ de Máxima Verosimilitud para β.

   b) Muestre que $\widehat{\beta}$ es insesgado.

   c) Calcule $V(\widehat{\beta})$. (Tomando que $y_j = \ln(1+x_j)$, exprese $\widehat{\beta}$ en términos de y_j)

   d) Es $\widehat{\beta}$ consistente?

   e) Calcule $B^2(\beta,\beta)$ la Información. Es $\widehat{\beta}$ eficiente?