Examen de área
Lógica
Noviembre de 2015

1. Para cada afirmación diga si es falsa o verdadera y justifique plenamente su respuesta.
   (a) Si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ son conjuntos recursivamente enumerables tales que $A \cup B$ y $A \cap B$ son recursivos, entonces A y B son recursivos.
   (b) Si A_n es recursivamente enumerable para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ es recursivamente enumerable.

2. Sea $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ el lenguaje de campos.
   (a) Muestre que existe un campo K de característica 0 tal que para toda sentencia φ de $\mathcal{L}$: si $F \models \varphi$ para todo campo finito F, entonces $K \models \varphi$.
   (b) Muestre que si K es como en la parte (a) y $f : K \to K$ es una función racional sobreyectiva, entonces f es inyectiva.

3. Recuerde que una fórmula $\theta(x)$ es completa en la teoría de un modelo M si para todo $\phi(x)$ se tiene que
$$Th(M) \models \forall x \left(\theta\left(x\right) \Rightarrow \phi\left(x\right)\right)$$
ó
$$Th(M) \models \forall x \left(\theta\left(x\right) \Rightarrow \neg\phi\left(x\right)\right).$$
Demuestre que un tipo es realizado en todo modelo de una teoría enumerable completa si y sólo si contiene una fórmula completa.

4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ con $|A| = 2^{\aleph_0}$. Muestre que existe un número racional q tal que
$$|A \cap (-\infty, q)| = |A \cap (q, \infty)| = 2^{\aleph_0}.$$

5. Sea $\mathcal{L}$ el lenguage con una relación de orden.
   i) Demuestre que la teoría de orden denso sin extremos tiene eliminación de cuantificadores.
   ii) Muestre que un orden denso con extremos no tiene eliminación de cuantificadores.

6. Suponga que $\star$ es una operación binaria en ω_1 (el primer ordinal no enumerable) tal que:

   i) para todo $\alpha \in \omega_1$, $\alpha \star 2 > \alpha$ y

   ii) para todo $\alpha, \lambda \in \omega_1$ con λ límite, $\alpha \star \lambda = \sup\{\alpha \star \beta : \beta \in \lambda\}$.

   Muestre que $\star$ no es conmutativa.