Examen de Área
Lógica
Noviembre 28 de 2012

1. Considere la teoría siguiente en el vocabulario: $L = \{P_1, P_2, ...\}$ donde cada P_i es un predicado unario:

   $T = \{\forall x \neg(P_i(x) \wedge P_j(x)) : i < j\} \cup \{\exists^{\geq n} x P_i(x) : n = 1, 2, ...; i = 1, 2...\}$

   (a) Muestre que T no es κ-categórica para ningún cardinal $\kappa \geq \omega$.

   (b) Si M es un modelo enumerable de T y $A \subseteq M$ demuestre que la teoría $Th(M, a)_{a \in A}$ tiene un modelo universal enumerable (todo modelo enumerable se puede sumergir elementalmente en dicho modelo universal).

   (c) Pruebe que T es ω-estable.

2. Demuestre que si un tipo t de un teoría completa T tiene finitas realizaciones en cada modelo de T entonces hay una cota finita para el número de realizaciones y el tipo es principal.

3. Recuerde que una estructura M se dice *ω-homogénea* si para todo n y elementos $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ y $b_1, \ldots, b_n$ del universo de M tales que $tp_M(a_1 \ldots a_n) = tp_M(b_1, \ldots, b_n)$, existe un elemento b_{n+1} en el universo de M tal que $tp_M(a_1 \ldots a_n, a_{n+1}) = tp_M(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})$.

   (a) Demuestre que toda estructura tiene una extensión elemental ω-homogénea.

   (b) Muestre que si A y B son estructuras enumerables tales que:

   1. A es elementalmente equivalente a B;
   2. ambas estructuras son ω-homogéneas; y
   3. para cada n, A y B realizan los mismos n-tipos,

   entonces $A \cong B$.

   (c) Muestre (con un contraejemplo) que en (b) no es suficiente asumir las condiciones 1 y 2.

4. (a) Demuestre que si κ es un cardinal infinito y $\gamma \geq 2$ entonces $\mathrm{cof}(\gamma^\kappa) > \kappa$.

   (b) Demuestre que no existe cardinal κ tal que $\aleph_\omega = 2^\kappa$.

5. Sea κ un cardinal no enumerable. Encuentre el número de subconjuntos cerrados y no acotados (o "club") de κ.

6. Un *árbol* es un subconjunto T del conjunto $2^{<\omega}$ de todas las sucesiones binarias finitas cerrado bajo segmentos iniciales, y una *rama* de T es una sucesión infinita binaria τ tal que cada segmento inicial finito de τ pertenece a T. Un árbol se dice *recursivo* si corresponde a un subconjunto recursivo de $\mathbb{N}$ después de aplicar una codificación de Gödel $c : 2^{<\omega} \to \mathbb{N}$.

   Muestre que existe un árbol recursivo que no tiene ninguna rama recursiva.

   Ayuda: puede utilizar la existencia de teorías recursivas esencialmente indecidibles.

7. (a) Muestre que si $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.... es una enumeración de todas las funciones recursivas totales de una variable entonces $h(x, y) = f_y(x)$ no es recursiva.

   (b) Muestre que existe una enumeración de las funciones recursivas parciales $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$....tal que $h(x, y) = f_y(x)$ es recursiva parcial.