Examen de Área: Geometría y Topología

Mayo de 2014

1. Considere el conjunto de funciones
$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua } \}.$$
Para cualquier función $h \in F$ tal que $h(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, sea
$$B_f(h) = \{g \in F : |g(x) - f(x)| < h(x) \, \forall \, x\}.$$
Sea T la topología más débil donde todos conjuntos $B_f(h)$ son abiertos. ?‘ Es (F, T) un espacio de Hausdorff?

2. Sean $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una aplicación suave y $c \in \mathbb{R}$ su valor regular (es decir la diferencial $df_a \neq 0$ para cada $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(a) = c$). Sea $M = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(a) = c\}$.

    a) Pruebe que las funciones $x_1, x_2, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$ forman un sistema de coordenadas locales sobre M en el conjunto $V_i = M \cap U_i$, donde $U_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0\}$.

    b) Demuestre que la n-forma
    $$\omega_i = (-1)^i \frac{1}{\partial f / \partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$
    no se anula nunca sobre U_i.

    c) Muestre que $\omega_i = \omega_j$ sobre $U_i \cap U_j$, y concluya que M es orientable.

    d) Calcule la correspondiente forma de volumen para la esfera $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

3. Sean $V = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y $\omega = -x_1 dx_3 \wedge dx_1 + x_2 dx_2 \wedge dx_3$ una 2-forma en $\mathbb{R}^3$.

    a) Encontrar el flujo del campo vectorial V.

    b) ?‘Es verdad que existe una 1-forma η tal que $d\eta = \omega$?

    c) Hallar la derivada de Lie $\mathcal{L}_V \omega$ de la forma ω en la dirección del campo vectorial V.

4. Probar que cada aplicación continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ es homotópica a una aplicación constante si

    a) $1 \leq n < m$;

    b) $n > 1$, $m = 1$.

5. Considere el grupo especial ortogonal $\mathbf{SO}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T X = I, \; \det X = 1\}$.

    a) Demuestre que $\mathbf{SO}(n) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ es una subvariedad suave y que $T_X \mathbf{SO}(n)$, su espacio tangente en X, es el espacio afín $\{X + AX | A^T = -A\}$.

b) Sean $1 < d_1 < \ldots < d_n$, y considere la matriz diagonal $D = \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$. Encuentre los puntos críticos de la función

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{SO}(n) & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \mathrm{tr}(DX) \end{array}$$

y calcule sus índices. Concluya que $\chi(\mathbf{SO}(3)) = 0$.

6. Responda verdadero o falso *en cuatro de los cinco* enunciados (justifique su respuesta):

a) La botella de Klein admite una estructura de variedad compleja.

b) T^2 no es difeomorfa a $\mathbb{S}^2$.

c) En la esfera $\mathbb{S}^2$ con estructura compleja estándar existe una función holomorfa $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $f(N) = i$, $f(S) = -i$, donde N y S son los polos de la esfera.

d) La característica de Euler de las esferas unitarias es

$$\chi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

e) Existe un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ que no se anula en ningún punto.