Para obtener la nota máxima en el examen es suficiente dar una solución completa a cinco de los seis ejercicios propuestos.

1. Sea X un conjunto infinito con la topología de Zariski, es decir un subconjunto es cerrado si y solo si es finito o es X. Demostrar que con esta topología:
   1. X es compacto
   2. X es conexo
   3. X no es de Hausdorff
   4. Cualquier subconjunto infinito es denso en X
   5. Si $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $\mathbb{R}$ tiene la topología estándar, entonces f es constante.

2. a) Demostrar que la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 0 \\ x_2 + \sin(x_3x_4)^2 = 0 \end{cases}$$

define una subvariedad Σ de dimensión 2 de $\mathbb{R}^4$. Hallar la ecuación del espacio tangente en el punto $(0,0,0,0)$. Es Σ difeomorfa a la botella de Klein?

b) Sea Δ el triangulo con vértices $(2,0),(0,0)$ y $(0,3)$ (Los segmentos de rectas que unen esos puntos). Es verdadero o falso (justificar la respuesta):

- Existe una función suave $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta = f^{-1}(0)$ y 0 es un valor regular de f.
- Existe una función suave $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta = f^{-1}(0)$.

3. Sea $V(x, y, z) = (0, -z, y)$ el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Sea ω la forma de área de la métrica sobre M inducida por la métrica estandar en $\mathbb{R}^3$.

   a) Probar que el campo vectorial V es tangente al cilindro $M = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 1\}$ y entonces define un campo vectorial W sobre el cilindro.

   b) Probar que la derivada de Lie $L_W\omega = 0$.

   c) Probar que la 1-forma $\eta = i_W\omega$ es cerrada, es decir $d\eta = 0$. Es verdadero o falso que $[\eta] \in H^1(M)$ es cero?

4. Considere la variedad $\Sigma = S^1 \times S^1 \setminus \{*\}$ que se obtiene al remover un punto del toro 2-dimensional y la inclusión $i : \Sigma \hookrightarrow S^1 \times S^1$.

    1. Calcule los grupos de homotopía (grupo fudamental y grupos de homotopía superior) de Σ y el morfismo inducido por i en grupos de homotopía.
    2. Calcule el anillo de cohomología de Σ y el morfismo inducido i en los anillos de cohomología.
    3. Es el haz tangente de Σ trivial?

5. Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada (compacta y sin frontera), conexa y orientada. Sea $u : M \to \mathbb{R}$ una función C^∞ que es armónica ($\Delta_g u = 0$). Demostrar que u es constante. Es la compacidad necesaria?, la conexidad?. Δ_g es el operador de Laplace-Beltrami asociado a la métrica g.

6. 1. Es posible tener un triangulo geodésico en el plano hiperbolico. (los lados son lineas geodésicas) con la suma de los ángulos menor que $\pi/2013$?

   2. Demostrar que no existen aplicaciones holomorfas no ramificadas entre una superficie de Riemann Y compacta y conexa de género 27 y una superficie de Riemann compacta y conexa X de género 10.