EXAMEN DE ÁREA-ANÁLISIS

No se permite el uso de ningún tipo de ayuda, esto incluye apuntes, libros, calculadoras, laptops, etc. Los celulares DEBEN permanecer apagados. Para obtener crédito todas sus respuestas deben estar justificadas.

1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de valores reales y de clase C^1 en $[0,1]$ tal que para todo n

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1.$$

y

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = 0.$$

Muestre que la sucesión tiene una subsucesión que converge uniformemente en $[0,1]$.

2. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 (funciones diferenciables con derivada continua) y $A \subseteq [0,1]$, A de medida de Lebesgue 0. Muestre que $f(A)$ tiene medida 0.

3. Sea $i : C([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ la inclusión del espacio de las funciones continuas de valores reales definidas en $[0,1]$ con la norma del supremo, i.e.,

$$\|f\|_{C([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

en las funciones de valor real de cuadrado integrable con la norma habitual:

$$\|f\|_{L^2([0,1])} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Muestre que i es continua, pero que no es compacta.

4. Determine si las siguientes series convergen o divergen:

a.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_2^{\infty} e^{-x^n}\, dx.$$

b.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

5.

a. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones cualesquiera. Defina

$$A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Demuestre que

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m.$$

b. Muestre que existe una constante $C > 0$ tal que para cualesquiera $m, l > 0$

$$\left| \sum_{k=m}^{m+l} \cos(n) \right| \leq C.$$

c. Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n}$ converge.

6. a. Muestre que una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ que satisfaga que $f(z+1) = f(z)$ y $f(z+i) = f(z)$ debe ser constante.

b. Muestre que si f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y es no constante, entonces su imagen $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ es densa.