EXAMEN DE CONOCIMIENTOS EN ANÁLISIS
23 de mayo de 2013

Tiempo: 3 horas.

Justifique todos los pasos. Si usa algún teorema, explique claramente cual es y por qué es aplicable.

1. (a) Sea $a_n := \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   Ayuda. Muestre que $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$.

   (b) Determine para cuales p la siguente serie converge, para cuales diverge. Pruebe sus afirmaciones.
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})^p}.$$

2. (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diga que quiere decir que f es uniformemente continua.

   (b) Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ derivable tal que $x \mapsto \frac{f'(x)}{x}$ es acotada en $[1, \infty)$. Muestre que $g : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) := \frac{f(x)}{x}$ es uniformemente continua.

3. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

   (a) Muestre que, si f es uniformemente continua, se tiene que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   (b) ¿Se puede concluir que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ si f es solamente continua?

4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y defina
   $$C_c(\Omega) := \{f \in C(\Omega) :\ f \text{ tiene soporte compacto en } \Omega\},$$
   $$C_0(\Omega) := \left\{ f \in C(\Omega) : \begin{array}{c} \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } K \subseteq \Omega \text{ compacto tal que} \\ |f(x)| < \varepsilon \text{ para } x \in \Omega \setminus K \end{array} \right\}.$$
   Muestre que $C_0(\Omega)$ es denso en $C_c(\Omega)$ con respecto a la norma $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$.

5. Calcule $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4/n}\,\mathrm{d}x$ si el límite existe. Si no existe, pruebe por qué no existe.

6. Sean $p, q \in (1,\infty)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sea μ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

   (a) Define $L_p(\mathbb{R})$ y diga qué es su espacio dual. (No tiene que probarlo.)

   (b) Muestre que para todo $f \in L_p(\mathbb{R})$

$$\|f\|_p = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} f\,\overline{g}\;\mathrm{d}\mu : g \in L_q(\mathbb{R}), \|g\|_q = 1 \right\}.$$

7. Sean X y Y espacios de Banach y $S : X \to Y$ un operador lineal biyectivo. Muestre que S^{-1} es continuo si y solo si $\inf\{\|Sx\| : x \in X, \|x\| = 1\} > 0$. Muestre que en este caso S también es continuo.

8. Sea X un conjunto infinito no enumerable y

$$\Sigma := \Big\{ A \subset X : A \text{ ó } X \setminus A \text{ es enumerable} \Big\}$$

   (el término *enumerable* incluye los conjuntos finitos.)

   Defina

$$\nu : \Sigma \to [0,\infty], \qquad \nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ es enumerable,} \\ \infty, & \text{si } X \setminus A \text{ es enumerable.} \end{cases}$$

   y

$$\mu : \Sigma \to [0,\infty], \qquad \mu(A) = \begin{cases} \#A, & \text{si } A \text{ es finito,} \\ \infty, & \text{si } A \text{ no es finito.} \end{cases}$$

   (a) Muestre que Σ es una σ-álgebra y que ν es una medida.

   (b) Muestre que ν es μ-continua (puede suponer que μ es una medida sin demostrarlo).

   (c) ¿ ν tiene una densidad con respecto a μ?