EXAMEN DE ÁREA: ANÁLISIS

1. Considere la serie $\sum a_n$. Muestre que si

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$

entonces la serie es convergente.

2. Sean X y Y espacios de Banach y $T:X\longrightarrow Y$ un operador lineal acotado. Muestre que las siguientes son equivalentes.
a. T es inyectiva y el rango $R(T)$ es cerrado.
b. Existe $C>0$ tal que $\|T(x)\|_Y\geq C\|x\|_X$ para todo $x\in X$.

3. sean $1<q<p\leq\infty$ e $I=[0,1]$. Muestre que existe una inclusión entre $L^p(I)$ y $L^q(I)$ y muestre que esta inclusión es estricta.

4. Usando el método de los residuos, calcule la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx,\quad a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

5. Sean f,g funciones de valores reales de clase C^1 en $[a,b]$ y sea $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\det\begin{bmatrix} f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\\ f'(x) & g'(x) & 0\end{bmatrix}.$$

Pruebe que existe $c\in(a,b)$ tal que $F(c)=0$.

6. Sea $f:[-\pi,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}$ la función $f(x)=x$.

a. Extienda la función f por periodicidad a todo $\mathbb{R}$ y calcule su serie de Fourier.

b. Decida si esta serie converge uniformemente o no.

c. Use la identidad de Parseval de la serie que usted calculó para calcular la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

7. Sea (f_n) una sucesión de funciones continuamente diferenciables del intervalo $I=[0,1]$ en $\mathbb{R}$ tal que
(a) $f_n\leq f_{n+1}$,
(b) Existe una constante $c>0$ tal que $\int_0^1|f_n'(t)|^2\,dt<c$ para todo n.

Muestre que o bien $f_n(x) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in I$, o bien (f_n) converge hacia una función continua.