# Examen de Área de Magister y Doctorado, Junio 15 2010
# ALGEBRA
# Universidad de Los Andes

1) Muestre que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ no es un dominio de integridad.

2) Determine el grupo de Galois de $K/\mathbb{Q}$, donde $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}]$ y encuentre un elemento $\alpha \in K$ tal que $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

3) Sea $A$ un anillo conmutativo, $I_1, \ldots, I_n \subset A$ ideales tales que $I_1 \cap \ldots \cap I_n = 0$ y $A/I_j$ es un anillo noetheriano para cada $j$. Muestre que $A$ es un anillo noetheriano.

4) Sean $S, T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mapas lineales tales que $S \circ T = T \circ S$. **a)** Muestre que existe una base $\alpha$ de $\mathbb{C}^n$ tal que las matrices $[T]_\alpha^\alpha$ y $[S]_\alpha^\alpha$ son ambas triangulares superiores. Ayuda: Primero encuentre un vector propio común a $S$ y $T$. **b)** Suponga que $S$ es nilpotente. Muestre que $P_T(x) = P_{S+T}(x)$, donde $P_T(x)$ es el polinomio característico de $T$.

5) Muestre que un grupo $G$ de orden 351 tiene un Sylow p-subgrupo para un primo $p$ que divide su orden.

6) Sean $\mathbf{k}$ un campo y $G \subset \mathbf{k}^*$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbf{k}^*$ de elementos invertibles en $\mathbf{k}$. Muestre que $G$ es cíclica.

7) Sea $A$ una matriz simétrica $n \times n$. Mostrar que los valores propios de $A$ son reales. Ayuda: Use el producto Hermitiano estandar en $\mathbb{C}^n$.

8) Sean $A$ un anillo conmutativo y $R = A[x]$. Muestre que el radical de Jacobson de $R$ y el nilradical de $R$ coinciden.