Examen de Conocimiento en Álgebra 2015-2

Tiempo: 3 horas

PREGUNTAS

Problema 1: *Sean F un cuerpo, n un entero positivo y $M_n(F)$ el espacio vectorial de matrices $n \times n$ sobre F.*

(a) Muestre que la función

$$\begin{array}{rcl} B : F^n \times F^n & \to & M_n(F) \\ (u, v) & \mapsto & u \cdot v^T \end{array}$$

es F-bilineal y que si $\widetilde{B} : F^n \otimes_F F^n \to M_n(F)$ es el morfismo F-lineal inducido por B entonces $\widetilde{B}$ es un isomorfismo.

(b) El producto punto usual $\langle , \rangle : F^n \times F^n \to F,\ (u, v) \mapsto u^T \cdot v$ define una función F-bilineal. Por la propiedad universal del producto tensorial $\langle , \rangle$ corresponde a un elemento ψ en el dual $(M_n(F))^*$. Dada $M \in M_n(F)$ encuentre $\psi(M)$.

Problema 2: *Sean p un primo, $\mathbb{F}_p$ el cuerpo de tamaño p y $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ el grupo de matrices invertibles de 2×2 sobre $\mathbb{F}_p$.*

(a) Muestre que $\mathrm{AGL}(1,p) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a \in \mathbb{F}_p^*, b \in \mathbb{F}_p \right\}$ es un subgrupo de $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_p)$ que es el término medio de una secuencia exacta de la forma

$$1 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{AGL}(1,p) \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \to 1.$$

(*Sugerencia: considere el determinante.*)

(b) El grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ actua via multiplicación matricial sobre $\mathbb{F}_p^2$. Muestre que el subconjunto $\mathbb{F}_p \times \{1\}$ de $\mathbb{F}_p^2$ es invariante bajo $\mathrm{AGL}(1,p)$ y que la acción de $\mathrm{AGL}(1,p)$ sobre $\mathbb{F}_p \times \{1\}$ es transitiva y fiel(i.e., el único elemento del grupo que actua trivialmente es la identidad).

(c) Muestre que $\mathrm{AGL}(1,p)$ es un subgrupo soluble que es isomorfo a un subgrupo transitivo de S_p, el grupo simétrico en p-símbolos.(*Sugerencia: Utilice (a) y (b).*)

(d) Muestre que S_p tiene un total de $(p-1)!$ p-ciclos. Deduzca que el número de p-Sylow subgrupos de S_p es $(p-2)!$.

(e) Sea P un p-Sylow subgrupo de S_p y $N_{S_p}(P)$ su normalizador. Muestre que $N_{S_p}(P) \cong \mathrm{AGL}(1,p)$.

Problema 3: *Sea G un grupo abeliano finito. Denotamos por $\widehat{G}$ el grupo de caracteres complejos de G y por $\mathbb{C}^G$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de funciones de G en $\mathbb{C}$.*

(a) Se $n > 2$ un entero. Explique brevemente por qué para todo entero a se tiene que χ_a, definida como $\chi_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*;\ [b] \mapsto e^{\left(\frac{2\pi i a b}{n}\right)}$, es un elemento de $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$. Muestre que la función definida a continuación es un isomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \\ [a] &\mapsto \chi_a. \end{aligned}$$

(b) Muestre que $G \cong \widehat{G}$. (*Sugerencia: Utilice (a).*)

(c) Muestre que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^G) = |G|$ y que la función definida a continuación es un producto interno sobre $\mathbb{C}^G$.

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_G : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G &\to \mathbb{C} \\ (f, g) \quad &\mapsto \sum_{\sigma \in G} f(\sigma)\overline{g(\sigma).} \end{aligned}$$

(d) Muestre que $\widehat{G}$ forma un subconjunto ortogonal, con respecto a $\langle , \rangle_G$, de $\mathbb{C}^G$. Deduzca que el conjunto de caracteres $\widehat{G}$ es una base $\mathbb{C}^G$. (*Sugerencia: Multiplique $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle_G$ por $\chi_1(\tau)$ para un $\tau \in G$ adecuado.*)

(e) Note que todo $f \in \mathbb{C}^G$ define un elemento $\widehat{f}$ en $\mathbb{C}^{\widehat{G}}$; si $\chi \in \widehat{G} \subset \mathbb{C}^G$ entonces $\widehat{f}(\chi) := \langle f, \chi \rangle_G$. Muestre que la función

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr} : \mathbb{C}^G &\to \mathbb{C}^{\widehat{G}} \\ f &\mapsto \widehat{f}. \end{aligned}$$

es un isomorfismo. (*Sugerencia: Muestre que* Fr *es 1-a-1 y explique por qué esto es suficiente.*)

Problema 4: *Sea K un cuerpo y $K[x]$ el anillo polinomial en una variable sobre K.*

(a) Sean $a, b \in K$ y $p(x) \in K[x]$. Muestre que $p(a) = b$ si y sólo si $p(x) \equiv b \bmod \langle x - a \rangle$.

(b) Sean $a_0, ..., a_n$ y $b_0, ..., b_n$ elementos de K con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Muestre que existe un único polinomio $q(x) \in K[x]$ de grado a lo más n tal que $p(a_i) = b_i$ para todo $0 \leq i \leq n$.

(c) Sea $\mathcal{A}$ la K-álgebra de funciones $\mathcal{A} := \{f \mid f : \{a_0, ..., a_n\} \to K\}$. Muestre que existe un isomorfismo de K-álgebras

$$K[x]/\langle (x - a_1)...(x - a_n) \rangle \cong \mathcal{A}.$$

Problema 5: *Sea L/K una extensión de Galois con grupo de Galois G. Una extensión intermedia E/K de L/K se llama una 2-torre si existe una cadena de subcuerpos*

$$K = E_0 \subseteq E_1 \subseteq ... \subseteq E_n = E$$

tal que $[E_{i+1} : E_i] = 2$.

(a) Si G es abeliano muestre que E es una 2-torre si y sólo si $[E : K]$ es una potencia de 2.

(b) Suponga que L/K es tal que $G \cong A_4$. Muestre que existe una sub-extensión E/K no trivial tal que $[E : K]$ es una potencia de 2 pero E no es una 2-torre.