Examen de área: Álgebra.

Desarrollar 6 de los 7 puntos.
Tiempo: 3 horas.

1. Sea n un entero ≥ 3 y sea $\zeta = e^{\frac{i2\pi}{n}}$.
   a) Mostrar que ζ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y que $\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Q}[\zeta]$.
   b) Mostrar que la extensión $\mathbb{Q}[\zeta]/\mathbb{Q}[\cos\frac{2\pi}{n}]$ es cuadrática.
   c) Mostrar que la extensión $\mathbb{Q}[\cos\frac{2\pi}{n}]/\mathbb{Q}$ es galoisiana. Se podrá utilizar sin demostrar que la extensión $\mathbb{Q}[\zeta]/\mathbb{Q}$ es galoisiana y que su grupo de Galois es isomorfo a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ (el grupo de unidades del anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
   d) ¿Cuál es el grado de la extensión $\mathbb{Q}[\cos\frac{2\pi}{n}]/\mathbb{Q}$?

2. Mostrar que existe un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

3. Sea A un anillo, M un A-módulo y $u : M \longrightarrow M$ un endomorfismo A-lineal de M.
   a) En esta pregunta, se supone que M es noetheriano. Mostrar que si u es sobreyectivo, entonces u es inyectivo.
   b) En esta pregunta, se supone que M es artiniano. Mostrar que si u es inyectivo, entonces u es sobreyectivo.

4. Sea $GL(\mathbb{R}, n)$ el grupo de las matrices $n \times n$ invertibles y $\mathbb{T}^n$ el subgrupo de $GL(\mathbb{R}, n)$ de las matrices diagonales invertibles. Calcule $N_{GL(\mathbb{R},n)}(\mathbb{T}^n)$ (el normalizador de $\mathbb{T}^n$ en $GL(\mathbb{R}, n)$) y muestre que $N_{GL(\mathbb{R},n)}(\mathbb{T}^n)/\mathbb{T}^n$ es isomorfo a $\mathbb{S}_n$ (el grupo simétrico en n letras).

5. Sea R un anillo conmutativo y $\mathfrak{m}$ un ideal maximal. Muestre que el anillo cociente $R/\mathfrak{m}^n$ es un anillo local.

6. Justificando su respuesta, decidir si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
   a) Sea A una matriz $n \times m$. El núcleo de A y $A^T A$ coinciden.
   b) El grupo de unidades del anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un grupo cíclico para todo $n \in \mathbb{N}$.
   c) Toda matriz nilpotente tiene traza cero
   d) Todo módulo proyectivo es libre.

7. Demuestre que un grupo finito es abeliano si y solo si toda representación compleja irreducible tiene dimensión 1.