Examen de área: Álgebra.

Tiempo: 3 horas.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo k. Si $T \in \mathrm{End}_k(V)$ definimos una estructura de $k[x]$-módulo en V por $p(x) \cdot v = p(T)v$.
   a) Decidir si V es finitamente generado y de torsión. (Recuerde que un módulo sobre un domino de integridad es de torsión si todo elemento no nulo del módulo es aniquilado por un elemento no núlo del anillo.)
   b) Decir bajo qué condiciones sobre T es V un $k[x]$-módulo cíclico.
   c) Dar una condición necesaria y suficiente sobre T para que V, como $k[x]$-módulo, tenga exactamente n-generadores.
2. Demuestre que toda matríz compleja es semejante (o similar) a su transpuesta. Ayuda: considere la forma canónica de Jordan.
3. Sea A el grupo abeliano dado por generadores a, b, c, d con relaciones

   $$-4a - 2b + 12d = 0, \quad 6a + 2b - 18d = 0, \quad 12b + 12c = 0.$$

   Determine el tipo de isomorfismo del grupo A.
4. Sea H un subgrupo propio de un grupo finito G. Probar que

   $$\bigcup_{x \in G} xHx^{-1} \neq G.$$

   Ayuda: considere la acción por conjugación de G sobre sobre sus subgrupos.
5. Describa el grupo de Galois del polinomio $X^6 - 7$ sobre $\mathbb{Q}$.
6. Sea A un anillo conmutativo noetheriano.
   a) Demuestre que A tiene un número finito de primos minimales (por inclusión).
   b) Demuestre que un si A es 0-dimensional entonces tiene un número finito de ideales maximales.
7. Sea R un anillo y sea M un R-módulo. Suponga que $\{f_i\}$ es una colección de elementos de R con $(\{f_i\}) = (1)$.
   a) Si $m \in M$ es 0 en las localizaciones $M[f_i^{-1}]$ para todo i entonces $m = 0$.
   b) Si $m_i \in M[f_i^{-1}]$ son tales que m_i y m_j van al mismo elemento de $M[f_i^{-1} f_j^{-1}]$ entonces existe un elemento $m \in M$ que va a m_i en $M[f_i^{-1}]$ para cada i.