Examen de área: Álgebra.

Tiempo: 3 horas.

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son **verdaderas o falsas**. Justificar.
   a) Sean A, B matrices cuadradas sobre los complejos. Si A y B tienen los mismos polinomios característicos, entonces son semejantes.
   b) Una matríz real unipotente tiene un único autovalor 1 (recuerde que una matríz X es llamada unipotente si $X - I$ es nilpotente).
   c) Sea K un campo arbitrario. Una matríz con coeficientes en K es invertible si y solo si su determinante es diferente de cero.
2. *a*) Determine el orden de cada uno de los elementos del grupo dihedrico D_{2n} (recuerde que D_{2n} es el grupo de simetrías del poligono regular de n lados).
   b) Calcule los p-subgrupos de Sylow de D_{2n}.
3. *a*) Demuestre la ecuación de clases: Si G es un grupo finito entonces

$$|G| = |\mathcal{Z}(G)| + \sum_i [G : C_G(x_i)]$$

   donde $\mathcal{Z}(G)$ es el centro de G y x_i varia sobre un conjunto de representantes de las clases de conjugación de G de cardinal mayor que uno. (Sugerencia: Considere la acción por conjugación de G en si mismo).
   b) Utilice el numeral anterior para demostrar que el centro de un p-grupo finito es un p-grupo no trivial.
4. (El problema inverso de Galois para grupos cíclicos)
   a) Sea G un grupo cíclico finito y n un entero positivo. Demuestre que si n divide a $|G|$ entonces G tiene un subgrupo cíclico de tamaño n.
   b) Suponga que p es un primo. Sea μ una raiz primitiva p-ésima de la unidad. Demuestre que el grupo de Galois de $\mathbb{Q}(\mu)/\mathbb{Q}$ es cíclico de tamaño $p-1$. Ayuda: el polinomio mínimo de μ es el polinomio ciclotómico de orden $p-1$ y sus raíces son μ^i donde $1 \leq i \leq p-1$.
   c) Demuestre que para todo entero positivo n existe una extensión de Galois $\mathbb{Q} \subset K$ con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ciclico de orden n. (Sugerencia: Puede usar **sin demostrar** el hecho de que

para cada entero positivo n existe un primo p tal que $p \equiv 1($ mód $n)$ y el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois).

5. Sean A, B anillos conmutativos con unidad y suponga que $A \subseteq B$ es una extensión entera (es decir, que todo elemento $b \in B$ es raiz de algún polinomio mónico con coeficientes en A). Demuestre que:
   a) Si $I \subseteq B$ es un ideal entonces $A/(I \cap A) \to B/I$ es una extensión entera
   b) Demuestre que, si $S \subseteq A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado de A entonces $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ es una extensión entera.
6. Sea K un campo finito.
   a) Demuestre que el grupo $(K^* := K \backslash \{0\}, \cdot)$ es un grupo cíclico.
   b) Determine el cardinal de $\mathrm{GL}(n, K)$ (definido como el grupo de transformaciones lineales invertibles $T : K^n \to K^n$).