Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado

24-10-2011

Tiempo 3 horas

Nivel Avanzado

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza éste espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

1. Usar el método de residuos para evaluar la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \ dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

donde $a > b > 0$.

Solución

2. Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Se define, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1}.$$

   (a) Mostrar que si la serie $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge hacia una suma $S \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia S.

   (b) Encontrar una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{k\geq 0} u_k$ diverja y la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja.

   Solución

3. (a) Cuando Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, muestre que Z^2 tiene distribución χ cuadrado con 1 grado de libertad. Pista: utilice la función generatriz de momentos de Z^2 y llévela a la forma de una función generatriz de momentos de una distribución χ cuadrado con 1 grado de libertad.

   (b) Cuando $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ son variables aleatorias independientes, todas con distribuciones normales con parámetros $\mu_1, \cdots, \mu_n$ y $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ respectivamente, entonces muestre que la variable aleatoria $U = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ tiene una distribución χ cuadrado con n grados de libertad, donde $Z_i = (Y_i - \mu_i)/\sigma_i$. Utilice la parte (a) y la función generatriz de momentos.

Solución

4. Sean X, Y espacios topológicos de Hausdorff y sea $f : X \to Y$ una biyección continua.
   (a) Muestre con un ejemplo que f no es necesariamente un homeomorfismo.
   (b) Pruebe que si X es compacto entonces f es un homeomorfismo.

   Solución

5. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X. Para $x \in X$, denotamos por $G_x = Stab_G(x)$ al estabilizador de x en G y por Gx a la orbita de x. Denotamos por Fix al conjunto de puntos fijos, esto es al conjunto de los $x \in X$ tales que Gx es un singleton.

   (a) Mostrar que para todo $x \in X$, existe una biyección entre Gx y G/G_x, el conjunto de los coconjuntos izquierdos de G_x en G.

   (b) Muestre que si p es un primo, G es un p-grupo finito (el orden de G es una potencia de p) y X es finito, entonces $|X| \equiv |Fix| \mod p$.

   (c) Usar lo anterior para demostrar el Teorema de Cauchy: Sea G un grupo finito y p un primo que divide al orden de G. Entonces G posee un elemento de orden p. [Ayuda: Sea $X = \{(x_1, \ldots, x_p) : x_1 \cdots x_p = 1\}$. Muestre que $|X| = |G|^{p-1}$ y considere la acción de $\mathbb{Z}_p$ sobre X por permutaciones cíclicas].

   Solución

6. (a) Sean $L : F$ y $F : K$ extensiones de campos finitas. Mostrar que $[L : F] \cdot [F : K] = [L : K]$.

   (b) Sea $F : K$ una extensión de campos y sea $\alpha \in F$. Muestre que $K(\alpha) : K$ es finita si y solo si α es algebráico sobre K.

   (c) Sea $L : K$ una extensión de campos y sean $a, b \in L$ algebráicos sobre K. Mostrar que $a + b$ y ab son algebráicos sobre K.

   Solución

7. Pruebe que en el espacio de las funciones continuas $C[a, b]$ no se puede introducir la estructura de un espacio de Hilbert (o sea, no se puede definir un producto interno que genere la norma).

   Solución