Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado

Nivel Básico

28-05-2010

Tiempo 3 horas

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza este espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

Escoja 8 de los 10 siguientes ejercicos

1. Probar que para todo k entero positivo

$$\sum_{j=1}^{j=k} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$$

Solución

2. ¿ Para qué valores del real t la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2t-1}{t}\right)^{2n}$$

es convergente? Hallar su suma para los valores de convergencia de t

Solución

3. Hallar el área de la superficie obtenida al girar la curva $y = \cos(2x)$, $0 \leq x \leq \pi/6$, alrededor de la recta $y = 0$.

   Solución

4. Hallar todas las soluciones $x \in \mathbb{Z}$ tales que

$$x \equiv 4 \mod (5), \quad x \equiv 2 \mod (7)$$

Solución

5. Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $T(A) = AB - BA$ ($M_2(\mathbb{R})$ es el espacio de las matrices 2×2 con coeficientes reales). Construir bases para $\ker(T)$ el espacio nulo de T y $R(T)$ el espacio imagen de T.

   Solución

6. Hallar el radio y el intervalo de convergencia dela serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+n+2}}{2^n(n^2+7)} x^n$$

Solución

7. Resolver la ecuación integral

$$y(t) - \int_0^t (t-s)y(s)\ ds = 1$$

Solución

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable no nula tal que $f'(0) = 2$ y $f(x+y) = f(x)f(x)$ para todo x, y en $\mathbb{R}$. Hallar f.

   Solución

9. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(0,\ 1)$. ¿ Qué tipo de distribución tiene la variable aleatoria Y definida por

$$Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$$

Solución

10. (a) Enunciar el teorema de la divergencia (llamado también Teorema de Gauss).
    (b) Mostrar que la divergencia de un campo vectorial C^1 en un punto p dado satisface

$$\operatorname{div}\ F(p) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{v(B_r)} \iint_{S_r} F.n\ dS$$

donde B_r es la bola centrada en p y de radio r, S_r es su frontera, n es la normal saliente y $v(B_r)$ es el volumen de la bola B_r.

Solución

Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado

Nivel avanzado

28-05-2010

Tiempo 3 horas

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza este espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

1. (a) Sea G un grupo con $|G|$ par. Demostrar que G tiene un elemento de orden 2.
   (b) Sea G un grupo con $|G|$ impar. Demostrar que G no tiene un elemento de orden 2.
   (c) Sea G un grupo con $|G| = 2n$, con n impar. Demostrar que G tiene exactamente un elemento de orden 2.

   Solución

2. Sea $a \geq 0$. Mostrar, justificando su respuesta, que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\, dx \; = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

Solución

3. Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$.

   (a) Mostrar que f es continua si y solo si para todo $t \in \mathbb{R}$ los conjuntos $\{x; f(x) < t\}$ y $\{x; f(x) > t\}$ son abiertos.

   (b) Mostrar que si f es continua para todo abierto ω en $\mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}(\omega)$ es unión enumerable de cerrados.

   Solución

4. Sea $f_n : [a,\ b] \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función f y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $[a,\ b]$ que converge a x.

   (a) Mostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$

   (b) Mostrar con un contraejemplo que la convergencia uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es necesaria.

   Solución

5. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{C})$ se dice nilpotente si existe un entero positivo k tal que $A^k = 0$.
   (a) Sea B una matriz invertible. Mostrar que A es nilpotente si y solo si BAB^{-1} lo es.
   (b) Sea T una matriz triangular. Mostrar que A es nilpotente si y solo si los elementos diagonales de T son nulos.
   (c) Mostrar que A es nilpotente si y solo si los valores propios de A son todos nulos.

   Solución