**Universidad de los Andes** **Departamento de Matemáticas**

# Examen de admisión al postgrado

7-5-2012
Tiempo 3 horas
Nivel Avanzado

**Importante**

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza éste espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

1. Sean $a > b > 0$. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)^2}.$$

**Solución**

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga que la sucesión $\{f_n\}_n$ converge uniformemente (en $\mathbb{R}$) a una función $f$. Muestre que si $\{x_n\}_n$ es una sucesión convergente de números reales, entonces
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

**Solución**

3. Sea $X$ un espacio Hausdorff y sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Muestre que si $A$ y $B$ son compactos entonces existen abiertos disyuntos $U, V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

   **Solución**

4. La variable aleatoria bivariada $(Y_1, Y_2)$ tiene una distribución de probabilidad conjunta discreta definida de la siguiente manera: su rango son cuatro puntos $\vec{y_i} \in \mathbb{R}^2$ sobre el plano cartesiano, cuyas coordenadas son: $\vec{y_i} = (i, i^2)$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Para los puntos $\vec{y_0}, \vec{y_1}, \vec{y_2}$ su probabilidad es: $P(\vec{y_i}) = 2^{-(i+1)}$ para $i = 0, 1, 2$ respectivamente y la probabilidad del punto $\vec{y_3}$ es $P(\vec{y_3}) = 2^{-3}$.

   (a) Calcule la función de densidad de probabilidad condicionada de $Y_1$ respecto de $Y_2$.

   (b) Decida si las variables aleatorias $Y_1$ e $Y_2$ son independientes o no explicando con detalle su respuesta.

   (c) Calcule la probabilidad del evento: $|Y_1 - Y_2| < 1$.

   (d) Calcule la probabilidad condicionada $P(Y_2 > 4 | Y_1 > 1)$.

   (e) Calcule el valor esperado y la varianza de $Y_1 - Y_2$.

   **Solución**

5. Sea $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ una partición del entero positivo $n$. Demuestre que $n!$ es divisible por $\prod_{i=1}^{r} n_i!$. [Ayuda: Puede usar el teorema de Lagrange sobre el orden de un subgrupo].

   **Solución**

6. Sea $G$ un grupo y $S$ un subconjunto de $G$ tal que para cualquier $g \in G$, $gSg^{-1} \subseteq S$. Demuestre que el subgrupo generado por $S$ es un subgrupo normal de $G$.

   **Solución**

7. (a) Demuestre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
   (b) Cual es el grado de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \supseteq \mathbb{Q}$?
   (c) Calcule el polinomio minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}$.

   **Solución**

8. Sea $H$ un espacio de Hilbert, $x_k \in H$, $k = 1, 2, ......$ tales que $\|x_k\| = 1$ y $< x_n, x_m >= C$ si $n \neq m$, donde $0 < C < 1$. Demuestre la existencia del límite débil de la sucesión $\{x_k\}$.

   **Solución**