Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado

31-10-2008

Tiempo 4 horas

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las paginas** que Usted utiliza.
2. Por favor resuelve todos los ejercicios en los espacios reservados para ello. Si no le alcanza este espacio pida papel blanco al profesor en el salón.

1. ¿ Es el número $4^{2008} + 4^{2009} + 1$ divisible por 7? Justificar plenamente.

   Respuesta:

2. Hallar la derivada $f^{(20)}(0)$ donde
$$f(x) = \frac{1+x}{2-x}$$

   Respuesta:

3. Hallar el límite
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$$

   Respuesta:

4. Sea la función real de variable real dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$$

   (a) Hallar el dominio de f
   (b) Hallar el conjunto más grande donde f es continua.
   (c) Hallar el conjunto más grande donde f es diferenciable.

   Respuesta:

5. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{(6)} - y = 0$$

que satisface $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

Respuesta:

6. ¿ Es la transformación lineal derivada $D : P_n \to P_n$ definida por $D(p) = p'$ diagonalizable? P_n es el espacio de los polinomios de grado menor o igual a n.

   Respuesta:

7. Sea el campo vectorial:

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

y la región $\Omega \in \mathbf{R}^3$,

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\,|\,a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\right\} \qquad b > a > 0$$

Calcular el valor de la integral de superficie sobre la frontera D de Ω de $\vec{\mathbf{F}}$, es decir

$$\iint_{D=\partial\Omega} \vec{\mathbf{F}}(x,y,z) \cdot d\mathbf{S}$$

de dos formas diferentes:

(a) Directamente.

(b) Usando el Teorema de divergencia.

Respuesta:

8. Calcular la siguiente integral, usando el método del cálculo de residuos:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{x^2+1}dx$$

Respuesta:

9. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(-x-y) & \text{si} \quad x > 0 \text{ y } \ y > 0 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $E(X + Y \mid X < Y)$.

Respuesta:

10. Sea A una matriz $n \times n$ real simétrica tal que

$$A^3 - 6A^2 + 15A + 3I = 0$$

   (a) Mostrar que A es invertible

   (b) Mostrar que A es múltiplo escalar de la identidad, es decir, que existe c real tal que $A = cI$

   Respuesta:

11. Mostrar que un espacio métrico (E, d) es completo si y sólo si la intersección de toda sucesión decreciente de cerrados no vacios $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ es no vacía. (El diámetro de un conjunto A es $\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y)$)
Respuesta:

12. Sea G un grupo no abeliano y $Z(G)$ su centro.
    (a) Mostrar que el grupo cociente $G/Z(G)$ no es cíclico
    (b) Mostrar que si el orden de G es pq (p, q son primos) entonces G tiene centro trivial.

    Respuesta: