

Examen de admisión posgrado, nivel avanzado

Universidad de Los Andes Departamento de matemáticas

06-05-2013

tiempo 3 horas

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en todas las paginas que use.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza este espacio, pida papel blanco adicional al profesor que está en el salón.

SUERTE!

Nombre y apellido:

1) Sean X, Y dos espacios topológicos de Hausdorff y suponga que X es compacto. Pruebe que la proyección $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ es una función cerrada (i.e. $\pi(C)$ es cerrado en Y para todo C cerrado en $X \times Y$).

Nombre y apellido:

2) Es posible encontrar una función suave $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la preimagen de un valor regular de f sea difeomorfa a la botella de Klein?

Nombre y apellido:

3) Calcule $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}}$.

Nombre y apellido:

4) Dos números son seleccionados independientemente y al azar en el intervalo $[0, 1]$. Sabemos que el menor de los dos es menor que $1/3$. ¿Cuál es la probabilidad de que el mayor sea mayor que $2/3$?

Nombre y apellido:

5) Demuestre las siguientes afirmaciones:

1. Si $k \subseteq K \subseteq L$ son extensiones de campo entonces $[L : k] = [L : K][K : k]$ (dónde $[A : B]$ es la dimensión de A como B -espacio vectorial).
2. $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$.
3. Suponga que $L = k_m \supseteq k_{m-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{Q}$ es una extensión de campos con $[k_j : k_{j-1}] \in \{1, 2\}$. Demuestre que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ no es isomorfo sobre \mathbb{Q} a un subcampo de L .

Nombre y apellido:

6) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 0$, si $x \notin \mathbb{Q}$, y $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ para p, q enteros relativamente primos.

(i) Determine en que puntos la función f es continua.

(ii) Determine si la función f restringida a $[0, 1]$ es integrable según *Riemann*.

Nombre y apellido:

7) Determinar un representantes de cada clase de conjugación en el grupo simétrico \mathbb{S}_5 y el número de elementos en cada clase.