Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas

Examen de Admisión al Doctorado, Parte 1 de 2

Abril 25 de 2007

Resuelva todos los problemas de manera clara, escribiendo las respuestas de cada problema en hojas separadas. Duración: 2 horas.

Ejercicio 1

Sea $M_n(\mathbb{C})$ el espacio vectorial de las matrices $n \times n$ sobre los complejos.
a) Pruebe que la función $F(A, B) = tr(AB^*)$ define un producto interno en $M_n(\mathbb{C})$. Aquí B^* denota la transpuesta conjugada de B y tr es el operador traza, i.e. la suma de los valores de la diagonal.
b) Encuentre una base ortonormal de $M_n(\mathbb{C})$ con respecto a este producto interno.

Ejercicio 2

Considere S la superficie del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ y el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x + y, 2y - z^2, 4z \rangle$$

Calcular el flujo del campo a través de la superficie, es decir, hallar $\int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Ejercicio 3

Demuestre el criterio de D'Alembert para la convergencia de series:
"Toda serie $\sum_{i\geq 1} a_i$ de términos positivos que satisfaga la condición

$$\text{lím} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

es convergente"

Ejercicio 4

Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una función continua, estrictamente positiva y tal que $\int_0^1 f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt = 1$.
Para cada $x \in [0, 1]$ se define $g(x)$ por la fórmula

$$\int_x^{g(x)} f(t)dt = 1.$$

Demostrar que g es una función de clase C^1. [Sugerencia: comenzar por mostrar que g es continua]

Ejercicio 5

Dos personas A, y B lanzan cada uno una moneda 10 veces. Llamemos C al evento de que la moneda caiga en cara y S al evento de que caiga en sello. Supongamos que la moneda no está cargada y por lo tanto $Pr(C) = Pr(S) = \frac{1}{2}$.
Los lanzamientos de A son: $CSCCSCSSSC$
y los de B son: $CCCCCCCSSS$.
a) Cuál de las dos sucesiones de lanzamientos tiene una probabilidad más alta de ocurrir?
b) Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara en 10 lanzamientos?

Ejercicio 6

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2.$$

Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas

Examen de Admisión al Doctorado, Parte 2 de 2

Abril 25 de 2007

Resuelva todos los problemas de manera clara, escribiendo las respuestas de cada problema en hojas separadas. Duración: 2 horas.

Ejercicio 7

Sea G un grupo y $C(G) = \{g \in G | \ hg = gh \text{ para todo } h \in G\}$ su centro. Demuestre que si $G/C(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.

Ejercicio 8

Demuestre que se tiene

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

para todo número natural n.

Ejercicio 9

Escoja un problema en este numeral.

9a) Sea (E, B, μ) un espacio de medida. Enunciar la desigualdad de Hölder en los espacios de Lebesgue $L^p(E)$ y utilizarla para mostrar que para p y q positivos tales que $1/p + 1/q = 1$ y $f_n \to f$ en $L^p(E)$ y $g_n \to g$ en $L^q(E)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n g_n \ d\mu = \int_E fg \ d\mu$$

9b) Enunciar el teorema de Hahn-Banach y mostrar que si $(x_n)_n$ es una sucesióon débilmente convergente a x en un espacio vectorial normado, entonces x está en la clausura del subespacio generado por los x_n.

Ejercicio 10

Sea $\mathbf{k}$ un campo y $\mathbf{k}(x)$ el campo de fracciones racionales. Construya un homomorfismo de anillos $\mathbf{k}(x) \to \mathbf{k}(x)$ que no sea sobreyectivo.

Ejercicio 11

Sea Y un espacio topológico compacto y X un espacio topológico cualquiera. Demostrar que la proyección $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada.

Ejercicio 12

Muestre que el número de raíces de la ecuación $z^4 + 5z + 1 = 0$ dentro del disco $|z| < 1$ es impar.