

Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Noviembre 4 de 2016

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque **todas** las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \sin(1/x)$ si $x > 0$ y $f(0) = 1$.
- (a) Pruebe que f no es continua en 0.
 - (b) Fije $0 < a < 1$ y sea $\delta(\epsilon) = \epsilon/a^2$. Pruebe que si $x, b \geq a$ y $|x - b| < \delta(\epsilon)$ entonces $|f(x) - f(b)| < \delta(\epsilon)$. Concluya que f es uniformemente continua en $[a, 1]$.
 - (c) Pruebe que f no es uniformemente continua en $(0, 1]$.

2. Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado y n un entero positivo. Dada $A \in M_{n \times n}(K)$, una matriz cuadrada $n \times n$, denotamos por $m_A(x) \in K[x]$ su polinomio minimal.

- (a) Suponga que $q(x) \in K[x]$ es un polinomio tal que $q(x)$ y $m_A(x)$ no tienen factores en común. Muestre la matriz $q(A)$ es invertible.
- (b) Muestre que $\lambda \in K$ es un valor propio de A si y sólo si $m_A(\lambda) = 0$.

3.

- (a) Enuncie explícitamente el lemma de Urysohn.
- (b) Demuestre que si X es un compacto de Hausdorff existe una inmersión de X en \mathbb{R}^N para algún N .

4. Sea X el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, y sea E la relación binaria sobre X definida por: $E(f, g)$ se cumple si y solamente si existe algún k en \mathbb{N} tal que, para todo i mayor o igual a k , $f(i) = g(i)$.

- (a) Demuestre que E es una relación de equivalencia.
- (b) Demuestre que toda clase de equivalencia de E es enumerable.

5. Considere un grupo finito G .

- (a) Sea X un conjunto de representantes de las clases de conjugación de G y $Cl(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\}$. Demuestre que

$$|G| = \sum_{x \in X} |Cl(x)|.$$

- (b) Suponga que G un grupo de orden p^n , donde p es un primo. Muestre que G tiene centro no trivial. Ayuda: $g \in G$ esta en el centro si y solo si $Cl(g) = \{g\}$.

6. Sea M una variedad diferencial con un sistema de cartas $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i \in \mathcal{I}$.
- (a) Construya un sistema de cartas para TM el haz tangente de M .
 - (b) Muestre que TM es orientable.

Se dejan caer n bolas, de manera independiente, en n urnas distintas.

(i) Hallar, para una urna específica, su probabilidad de quedar vacía.

(ii) Sea V_n la cantidad de urnas que quedan vacías. Hallar $\mathbb{E}V_n$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}V_n}{n}$$

(iii) Sea Q_n la cantidad de pares, $i < j$, tales que ambas urnas i y j quedan vacías. Hallar $\mathbb{E}Q_n$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}Q_n}{n^2}$$