

Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

Noviembre 4 de 2016

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque **todas** las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. ¿ Cuántos números enteros x hay en el intervalo $[1, 700.000]$ que satisfacen simultáneamente las dos congruencias: (a) x^2 es congruente a 2 (módulo 7) y (b) x es congruente a 1 (módulo 5)?

2. Muestre que si f es una función par, entonces su derivada f' es impar y muestre que si f es una función impar entonces f' es par.

3. Calcule $\int \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$.

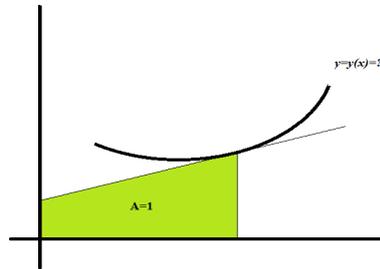
4. Considere el campo vectorial en el espacio \mathbb{R}^3 dado por $\vec{\mathbf{F}} = \langle y, 2z, -3y^2 \rangle$, el paraboloides $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$, y el disco $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9, z = 0\}$, ambas superficies orientadas hacia arriba.

- i. Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}$, el rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$.
- ii. Explique claramente por qué $\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$.
- iii. Calcule tal integral.

5. Calcule la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

6. Encuentre la curva $y = y(x)$ que pasa por el punto $(1, 1)$ y posee la siguiente propiedad: si trazamos una tangente a esta curva hasta que cruce con el eje OY , y un segmento vertical hasta que cruce con el eje OX , se forma un trapecio, cuya área siempre es constante e igual a uno (ver figura).



7. Considere el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ y la matriz 4×4 dada por $A = \vec{v} \cdot \vec{v}^t$.

- i. Encuentre $\rho(A)$, la dimensión del espacio columna de A .
- i. Encuentre $\nu(A)$, la dimensión del espacio nulo de A .
- iii. Muestre que $A \cdot \vec{v} = 4\vec{v}$.
- iv. Explique por qué la matriz A es diagonalizable y encuentre una matriz D diagonal similar a la matriz A .
- v. Encuentre el polinomio característico de A .